TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Künstliche Intelligenz, Professur Computational Logic

THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

6. Vorlesung: Unentscheidbare Probleme formaler Sprachen

Hannes Straß

TU Dresden, 25. April 2022

Rückblick

Zwei wesentliche Erkenntnisse der letzten Vorlesung:

- Praktisch alle interessanten Fragen zu Turingmaschinen sind unentscheidbar. (Rice)
- Es gibt unentscheidbare Probleme, die nicht direkt mit Berechnung zu tun haben. (Post)

Unentscheidbare Probleme formaler Sprachen

Wiederholung (Vorlesung Formale Systeme)

Wir schreiben $\mathbf{L}(G)$ für die Sprache, welche durch die Grammatik G erzeugt wird.

Satz (aus Formale Systeme):
Das Schnittproblem regulärer Grammatiken ist entscheidbar.
Gegeben: Reguläre Grammatiken G_1 und G_2
Frage: Ist $\mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2) \neq \emptyset$?

Beweisskizze: Für reguläre Grammatiken G_1 und G_2 kann man $\mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2)$ durch einen Automaten darstellen (Produktkonstruktion). Automaten kann man leicht auf Leerheit testen. □

Satz (aus Formale Systeme):
Das Schnittproblem kontextfreier Grammatiken ist unentscheidbar.
Gegeben: Kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2
Frage: Ist $\mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2) \neq \emptyset$?

CFG-Schnittproblem unentscheidbar (1)

Satz: Das Schnittproblem kontextfreier Grammatiken ist unentscheidbar.
Gegeben: Kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2
Frage: Ist $\mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2) \neq \emptyset$?

Beweis: Durch Many-One-Reduktion vom PCP:

- Für eine gegebene PCP-Instanz P
- konstruieren wir kontextfreie Grammatiken G_x und G_y, so dass gilt:
- P hat eine Lösung genau dann wenn $\mathbf{L}(G_x) \cap \mathbf{L}(G_y) \neq \emptyset$.

CFG-Schnittproblem unentscheidbar (2)

Beweis: Sei $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ eine PCP-Instanz mit Alphabet Σ.

Die Grammatik G_x wird definiert als $\langle V, \Sigma_k, P_x, \mathrm{S} \rangle$ mit

- $V = \{\mathrm{S}\}$
- $\Sigma_k = \Sigma \cup \{1, \dots, k\}$ (o.B.d.A. sei dies eine disjunkte Vereinigung)
- P_x ist die Menge aller Regeln

$$\mathrm{S} \to i\mathrm{S}x_i \quad \text{und} \quad \mathrm{S} \to ix_i \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq k$$

Damit ist G_x leicht berechenbar.
$G_y = \langle V, \Sigma_k, P_y, \mathrm{S} \rangle$ wird analog definiert.

Damit ergibt sich:

- $\mathbf{L}(G_x) = \{i_\ell \cdots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} \mid \ell \geq 1 \text{ und } i_1, \dots, i_\ell \in \{1, \dots, k\}\}$ und
- $\mathbf{L}(G_y) = \{i_\ell \cdots i_1 y_{i_1} \cdots y_{i_\ell} \mid \ell \geq 1 \text{ und } i_1, \dots, i_\ell \in \{1, \dots, k\}\}$

CFG-Schnittproblem unentscheidbar (3)

Beweis: Wie soeben erkannt:

- $\mathbf{L}(G_x) = \{i_\ell \cdots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} \mid \ell \geq 1 \text{ und } i_1, \dots, i_\ell \in \{1, \dots, k\}\}$ und
- $\mathbf{L}(G_y) = \{i_\ell \cdots i_1 y_{i_1} \cdots y_{i_\ell} \mid \ell \geq 1 \text{ und } i_1, \dots, i_\ell \in \{1, \dots, k\}\}$

Damit folgt:

$\mathbf{L}(G_x) \cap \mathbf{L}(G_y) \neq \emptyset$
gdw. es gibt ein $w \in \Sigma^*$ mit $w \in \mathbf{L}(G_x)$ und $w \in \mathbf{L}(G_y)$
gdw. es gibt eine Sequenz $i_1, \dots, i_\ell \in \{1, \dots, k\}$ mit $\ell \geq 1$, so dass:
$i_\ell \cdots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = i_\ell \cdots i_1 y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$
gdw. es gibt eine Sequenz $i_1, \dots, i_\ell \in \{1, \dots, k\}$ mit $\ell \geq 1$, so dass:
$x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} = y_{i_1} \cdots y_{i_\ell}$
gdw. die PCP-Instanz P hat eine Lösung. □

Wiederholung (Vorlesung Formale Systeme)

Wir wissen:

- Kontextfreie Grammatiken kann man als Kellerautomaten darstellen und umgekehrt. (Diese Umformung ist berechenbar.)
- Deterministisch kontextfreie Sprachen kann man als deterministische Kellerautomaten darstellen.

Satz (Formale Systeme):

- Das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken ist entscheidbar.
- Kontextfreie Sprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen.
- Deterministisch kontextfreie Sprachen sind unter Komplement abgeschlossen.

Eine einfache Beobachtung

Die Grammatiken G_x und G_y aus dem vorigen Beweis kann man leicht als deterministische Kellerautomaten darstellen:

- Die Indizes $i_\ell \cdots i_1$ lassen sich deterministisch einlesen und auf dem Stack ablegen.
- Sobald der Wortteil $x_{i_1} \cdots x_{i_\ell}$ beginnt, wird der Stack abgearbeitet und jeweils nur das Wort für den aktuellen Index akzeptiert.

Wir haben also auch schon gezeigt:

Korollar: Das Schnittproblem deterministischer Kellerautomaten ist unentscheidbar.
Gegeben: Deterministische Kellerautomaten $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$
Frage: Ist $\mathbf{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_2) \neq \emptyset$?

CFG-Äquivalenz (1)

Satz: Das Äquivalenzproblem kontextfreier Grammatiken ist unentscheidbar.
Gegeben: Kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2
Frage: Ist $\mathbf{L}(G_1) = \mathbf{L}(G_2)$?

Beweis: Durch Many-One-Reduktion vom Komplement des Schnittproblems.

- Seien die deterministischen Kellerautomaten $\mathcal{M}_x$ und $\mathcal{M}_y$ gegeben.
- $\mathcal{M}_x$ kann man komplementieren: sei $\overline{\mathcal{M}}_x$ der Automat für die Sprache $\overline{\mathbf{L}(\mathcal{M}_x)}$.
- Für $\overline{\mathcal{M}}_x$ und $\mathcal{M}_y$ kann man jeweils eine Grammatik berechnen: sei $\overline{G}_x$ die Grammatik für die Sprache $\mathbf{L}\left(\overline{\mathcal{M}}_x\right)$ und G_y die Grammatik für $\mathbf{L}(\mathcal{M}_y)$.
- Kontextfreie Grammatiken kann man vereinigen: sei $G_{\overline{x}y}$ die Grammatik mit $\mathbf{L}(G_{\overline{x}y}) = \mathbf{L}\left(\overline{G}_x\right) \cup \mathbf{L}(G_y)$.

CFG-Äquivalenz (2)

Satz: Das Äquivalenzproblem kontextfreier Grammatiken ist unentscheidbar.
Gegeben: Kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2
Frage: Ist $\mathbf{L}(G_1) = \mathbf{L}(G_2)$?

Beweis: Wir behaupten:

$$\text{„}\mathbf{L}(\mathcal{M}_x) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_y) \stackrel{?}{=} \emptyset\text{“} \quad \longrightarrow \quad \text{„}\mathbf{L}(G_{\overline{x}y}) \stackrel{?}{=} \mathbf{L}\left(\overline{G}_x\right)\text{“}$$

ist die gesuchte Reduktion.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathcal{M}_x) \cap \mathbf{L}(\mathcal{M}_y) = \emptyset \quad &\text{gdw.} \quad \mathbf{L}(G_y) \subseteq \mathbf{L}\left(\overline{G}_x\right) \\ &\text{gdw.} \quad \mathbf{L}(G_y) \cup \mathbf{L}\left(\overline{G}_x\right) = \mathbf{L}\left(\overline{G}_x\right) \\ &\text{gdw.} \quad \mathbf{L}(G_{\overline{x}y}) = \mathbf{L}\left(\overline{G}_x\right). \end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit folgt, da das Komplement des Schnittproblems unentscheidbar ist. □

Diskussion

Anmerkung 1: $G_{\overline{x}y}$ ist nicht unbedingt deterministisch. Der Beweis gilt also nicht für deterministische CFGs. In der Tat ist Äquivalenz dort (mit viel Aufwand) entscheidbar.

(Sénizergues: L(A)=L(B)? Decidability results from complete formal systems, 2001. Der komplexe Beweis zeigt Semi-Entscheidbarkeit des Problems und seines Komplements, also keine Zeitgrenzen.)

Anmerkung 2: Aus der Unentscheidbarkeit der CFG-Äquivalenz folgt – durch einfache Many-One-Reduktion – die Unentscheidbarkeit der Äquivalenz aller Formalismen, in die man CFGs leicht übersetzen kann:

- Kellerautomaten
- kontextsensitive Grammatiken/LBAs
- LOOP-Programme
- Typ-0-Grammatiken/Turingmaschinen/WHILE-Programme
- ...

Unentscheidbare Probleme für Typ 1

Wir halten noch einmal fest:

Satz: Für kontextsensitive Grammatiken G_1 und G_2 sind die folgenden Fragen unentscheidbar:

(1) Äquivalenz: $\mathbf{L}(G_1) = \mathbf{L}(G_2)$?

(2) Schnitt: $\mathbf{L}(G_1) \cap \mathbf{L}(G_2) = \emptyset$?

(3) Leerheit: $\mathbf{L}(G_1) = \emptyset$?

Beweis: (1) und (2) gelten, weil alle kontextfreien Grammatiken auch kontextsensitive Grammatiken sind (offensichtliche Many-One-Reduktion).

(3) gilt, da kontextsensitive Sprachen unter Schnitt abgeschlossen sind (siehe Vorlesung Formale Systeme), so dass man Schnitt auf Leerheit reduzieren kann. □

Semi-Entscheidbarkeit

Beobachtung 1: Das Schnittproblem ist semi-entscheidbar: zähle alle Wörter von $\mathbf{L}(G_1)$ auf und teste jeweils, ob sie in $\mathbf{L}(G_2)$ liegen.

Beobachtung 2: Das Komplement des Schnittproblems ist demnach nicht semi-entscheidbar. Ebenso ist also das Äquivalenzproblem nicht semi-entscheidbar (wegen Many-One-Reduktion).

Beobachtung 3: Das Komplement des Äquivalenzproblems ist semi-entscheidbar: zähle abwechselnd Wörter von $\mathbf{L}(G_1)$ und $\mathbf{L}(G_2)$ auf und teste jeweils, ob sie nicht in $\mathbf{L}(G_2)$ bzw. $\mathbf{L}(G_1)$ liegen.

Quiz: Semi-Entscheidbarkeiten

Quiz: Überlegen Sie zu jedem der folgenden Probleme, ob es semi-entscheibar ist.

...

Unentscheidbarkeiten

Das schwerste unentscheidbare Problem?

Wir haben gesehen (Übung):

Satz: Jedes semi-entscheidbare Problem kann auf das Halteproblem many-one-reduziert werden.

Demnach kann man außerdem Komplemente semi-entscheidbarer Probleme („co-semi-entscheidbare“ Probleme) auf das Halteproblem Turing-reduzieren.

Mit anderen Worten: Wenn man das Halteproblem lösen könnte, dann könnte man jedes (co-)semi-entscheidbare Problem lösen.

Ist das Halteproblem das schwerste unentscheidbare Problem?

(Sind alle unentscheidbaren Probleme auf das Halteproblem Turing-reduzierbar?)

Das schwerste unentscheidbare Problem?

Ist das Halteproblem das schwerste unentscheidbare Problem?

(Sind alle unentscheidbaren Probleme auf das Halteproblem Turing-reduzierbar?)

Nein, sicher nicht.

Beweisskizze: Wir können uns Turing-Reduktionen als TMs vorstellen, die Subroutinen aufrufen dürfen.

- Selbst ohne die Details der formalen Definition ist klar: Solche TMs müssen weiterhin endlich beschreibbar sein.
- Daher gibt es nur abzählbar viele solcher TMs.
- Es gibt aber überabzählbar viele Probleme.

Also sind die meisten Probleme nicht durch Turing-Reduktionen auf das Halteproblem lösbar. □

Noch unentscheidbarere Probleme

Gibt es auch konkrete unentscheidbare Probleme, die nicht mithilfe von $\mathbf{P}_{\text{halt}}$ lösbar sind?

Ja, zum Beispiel folgendes:

Wir betrachten folgendes Problem $\mathbf{P}^2_{\text{halt}}$:
Gegeben: Ein Wort w und eine DTM $\mathcal{M}$, welche $\mathbf{P}_{\text{halt}}$ als Subroutine verwenden darf.
Frage: Hält $\mathcal{M}$ auf w?

Dies ist sozusagen ein Halteproblem höherer Ordnung.

Ein noch schwereres Problem $\mathbf{P}^3_{\text{halt}}$ ist das Halteproblem für TMs, die $\mathbf{P}^2_{\text{halt}}$ als Subroutine verwenden dürfen.

$\rightsquigarrow$ Es gibt eine unendliche Hierarchie unentscheidbarer Probleme!

Und selbst all diese Probleme sind nur abzählbar viele . . .

Das leichteste unentscheidbare Problem?

Ist das Halteproblem das leichteste unentscheidbare Problem?

(Ist das Halteproblem auf alle unentscheidbaren Probleme Turing-reduzierbar?)

Nein, auch das gilt nicht.

Die Situation ist ziemlich kompliziert:

- Es gibt unentscheibare Probleme **A** und **B**, so dass
- $\mathbf{A} \leq_T \mathbf{P}_{\text{halt}}$ und $\mathbf{B} \leq_T \mathbf{P}_{\text{halt}}$, aber
- $\mathbf{A} \not\leq_T \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \not\leq_T \mathbf{A}$

Man kann also mit $\not\leq_T$ nicht einmal alle Klassen unentscheidbarer Probleme in eine totale Ordnung bringen.

Bewiesen im Jahr 1956 (unabhängig) von Friedberg (USA) und Muchnik (USSR).

Allerdings sind diese Probleme sehr künstlich.

Wozu das alles?

Die Untersuchung der Struktur des Unentscheidbaren hat sehr viele Fragen betrachtet und beantwortet.
$\rightsquigarrow$ Forschungsgegenstand der Berechenbarkeitstheorie

Offensichtliche Frage: Bringt uns das praktische Einsichten?

„Jain“:

- Einerseits sind alle unentscheidbaren Probleme praktisch unlösbar.
- Andererseits kann der Grad der Unentscheidbarkeit ein Hinweis auf die Schwere entscheidbarer Teilprobleme sein.

Beispiel: Noch ein Problem

Das Universalitätsproblem von TMs fragt, ob eine TM alle Eingaben akzeptiert:
Gegeben: Turingmaschine $\mathcal{M}$ über Eingabealphabet Σ
Frage: Ist $\mathbf{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^*$?

Das Universalitätsproblem vom TMs ist schwerer als das Halteproblem (aber Turing-reduzierbar auf $\mathbf{P}^2_{\text{halt}}$). Das zeigt sich auch bei Sonderfällen:

- Kontextfreie Grammatiken: Wortproblem und Leerheitsproblem entscheidbar; Universalität unentscheidbar
- Endliche Automaten: Wortproblem und Leerheitsproblem effizient lösbar (polynomiell); Universalität PSpace-hart (nur exponentielle Algorithmen bekannt)

Euklid als Informatiker

Geometrie nach Euklid

Etwa im 3. Jhd. v.u.z. veröffentlicht Euklid sein Lehrbuch Die Elemente und begründet darin die euklidische Geometrie.

Zentrales Thema der euklidischen Geometrie ist die Konstruktion mit den euklidischen Werkzeugen:

- Lineal: beliebig lang, aber ohne Markierungen
- Zirkel: zeichnet Kreise, aber trägt bei Euklid keine Längen ab (kollabierend)

Die Konstruktion mit diesen idealen Werkzeugen gilt bei den Griechen und noch Jahrhunderte später als Königsdisziplin der Mathematik.

Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Erlaubte Konstruktionsschritte:

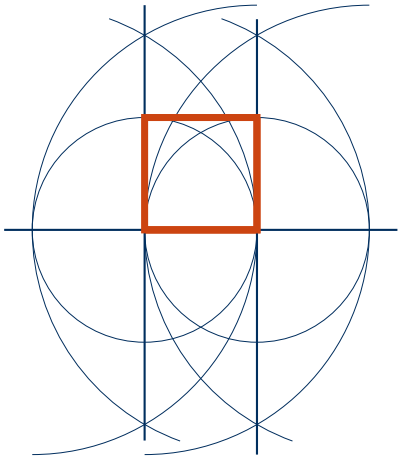
(1) Ziehen einer beliebig langen Geraden durch zwei verschiedene Punkte

(2) Zeichnen eines Kreises mit einen gegebenen Mittelpunkt, der durch einen gegebenen Punkt verläuft

(3) Abtragen einer Strecke mit dem Zirkel
Bei Euklid nicht direkt erlaubt, aber Euklid selbst hat bewiesen, dass diese Operation als Makro mithilfe der Operationen (1) und (2) darstellbar ist

Beispiel

Man kann ein Quadrat wie folgt konstruieren:



Weitere Konstruktionsbeispiele

Es lassen sich zahlreiche weitere Konstruktionen durchführen, z.B.:

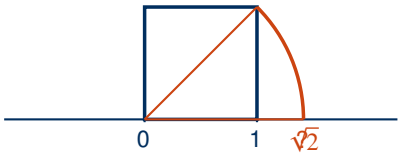
- Halbierung eines Winkels
- Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks
- Konstruktion eines flächengleichen Quadrates aus einem gegebenen Rechteck
- Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks
  (Entdeckt vom 18-jährigen C. F. Gauß – „Durch angestrengtes Nachdenken . . . am Morgen . . . (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war).“)
- Konstruktion des regelmäßigen 65537-Ecks (Hermes)
- . . .

Rechnen mit Euklid

1637: René Descartes publiziert die Idee des Koordinatensystems

$\rightsquigarrow$ Geometrie wird numerisch!

Beispiel: Beginnend mit Punkten an den Koordinaten $(0, 0)$ und $(1, 0)$ können wir einen neuen Punkt konstruieren:



Wir haben also $\sqrt{2}$ „berechnet“!

Was kann dieser „Rechner“?

Man kann Geometrie durch Gleichungen darstellen:

- Gerade durch Punkte (a, b) und (c, d):
  $y = \frac{d-b}{c-a}x + \frac{bc-da}{c-a}$
- Kreis um Mittelpunkt (a, b) durch Punkt (c, d): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$

Zeichnen: Systeme solcher Gleichungen grafisch lösen.

Es stellt sich heraus: Alle so konstruierbaren Zahlen ergeben sich mit folgenden Rechnungen:

- Addition und Subtraktion
- Multiplikation und Division
- Ziehen der Quadratwurzel

$\rightsquigarrow$ Unmöglich („euklidisch unberechenbar“) sind zum Beispiel die Konstruktion von π („Quadratur des Kreises“) und die Berechnung von Kubikwurzeln („Verdoppelung des Würfels“)

Euklid statt Turing?

Liefert uns das eine alternatives Berechenbarkeitsmodell?

Vermutlich nicht:

- Exaktes Zeichnen ist nicht physisch implementierbar.
  (Es gibt z.B. keinen perfekten Kreis.)
- Die Ergebnisse sind nicht exakt ablesbar (Messfehler).

Dennoch illustriert das wichtige Ideen der Informatik:

> Informatik erforscht, was Computer sind
> und welche Probleme man mit ihnen lösen kann.

Man sollte trotz Church-Turing immer neu fragen, was Rechnen noch sein kann . . .

Zusammenfassung und Ausblick

Die Unentscheidbarkeit vieler Probleme der Theorie formaler Sprachen lässt sich gut durch Reduktion vom Postschen Korrespondenzproblem zeigen.

Es gibt mehr als eine Art von Unentscheidbarkeit.

Euklid hätte vielleicht auch Informatiker sein können.

Was erwartet uns als nächstes?

- Methoden zur Unterteilung entscheidbarer Probleme: Komplexität
- Effizienz von Turingmaschinen
- Praktisch lösbare Probleme