TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik, Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Formale Systeme
14. Übungsblatt

Wintersemester 2023/24

Aufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet und L, L_1, $L_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbare Sprachen.

Zeigen Sie:

(a) $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2, L_1 \setminus L_2$ und $L_1 \circ L_2$ sind entscheidbar.

(b) $L^R = \{w^R : w \in L\}$ ist entscheidbar, wobei für $w = a_1 \dots a_{n-1}a_n \in \Sigma^*$:

$$w^R = a_n a_{n-1} \dots a_1$$

(und $\varepsilon^R = \varepsilon$, $a^R = a$ für $a \in \Sigma$).

(c) Jede co-endliche Sprache ist entscheidbar. Dabei wird L co-endlich genannt, wenn $\overline{L}$ endlich ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten die folgenden beiden Problemstellungen:

- Das Job-Rechnerproblem: Gegeben sind n Rechner $R_1, \dots, R_n$ und m Jobs $J_1, \dots, J_m$. Weiter liegt eine Tabelle

$$T = (t_{i,k})_{1 \le i \le n, 1 \le k \le m}$$

vor, in der eingetragen ist, welcher Rechner für welchen Job die notwendige Ausstattung besitzt. Dabei ist $t_{i,k} = 1$, falls der k-te Job J_k auf Rechner R_i ausführbar ist. Andernfalls ist $t_{i,k} = 0$. Gefragt ist, ob es eine Zuordnung Jobs $\longrightarrow$ Rechner gibt, so daß die m Jobs gleichzeitig ausgeführt werden können.

Wir nehmen dabei an, daß kein Rechner zwei oder mehr Jobs gleichzeitig ausführen kann.

- Matchingproblem (einfache Variante für bipartite Graphen): Gegeben ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Partition $V = V_L \cup V_R$ mit disjunkten nichtleeren Mengen V_L und V_R, so daß jede Kante zwischen V_L und V_R verläuft; d.h. für jede Kante $e \in E$ gilt:

$$e \cap V_L \neq \varnothing \text{ und } e \cap V_R \neq \varnothing$$

Gefragt ist, ob es eine Kantenmenge $M \subseteq E$ gibt, so daß jeder Knoten $v \in V$ auf höchstens einer Kante von M liegt und $|M| = |V_L|$.

Zeigen Sie, daß das Job-Rechnerproblem auf das Matchingproblem reduzierbar ist.

Aufgabe 3

(a) Begründen Sie die Entscheidbarkeit des folgenden Problems:

- Gegeben: Spielkonfiguration von 4–gewinnt, in der Spieler X am Zug ist.
- Gefragt: Gibt es eine Gewinnstrategie für Spieler X, d.h. eine Zugmöglichkeit, die Spieler X den Gewinn garantiert, wenn Spieler X im folgenden stets einen optimalen Zug ausführt; unabhängig davon, wie sich Spieler O verhält?

Hinweis: Sie müssen nicht erläutern, wie eine solche Gewinnstrategie zu finden ist, sondern lediglich die Existenz eines Algorithmus, der prüft, ob es eine Gewinnstrategie gibt, belegen.

Spiel 4gewinnt: Ein senkrecht stehendes hohles Brett mit 7 Spalten und 6 Reihen wird von zwei Spielern (X und O) abwechselnd mit unterschiedlich gefärbten Spielsteinen (jeder hat 21 Spielsteine) gefüllt. Dabei fallen die Spielsteine in den Spalten nach unten. Gewinner ist derjenige, der vier seiner Spielsteine waagerecht, senkrecht oder diagonal in eine Linie bringt. Gelingt das keinem der beiden Spieler, so wird das Spiel als Remis gewertet.

(b) Begründen Sie die Semientscheidbarkeit des folgenden Problems:

- Gegeben ist eine Zahlenfolge $s = s_1 s_2 \dots s_n \in \{0, 1, \dots, 9\}^n$, $n \geq 1$.
- Gefragt: Kommt in dem Nachkommateil der Dezimaldarstellung von π die Sequenz s vor?

Hinweis: Sie dürfen als bekannt voraussetzen, daß es beliebig genaue Näherungsverfahren für π gibt. Skizzieren Sie die Arbeitsweise eines Semientscheidungsverfahren für das genannte Problem unter Verwendung eines Algorithmus

$$\textit{Pi-Näherungsverfahren}(k),$$

das als Eingabe eine natürliche Zahl $k \geq 1$ hat und als Ausgabe die k ersten Ziffern des Nachkommateils der Dezimaldarstellung von π zurückgibt.

Aufgabe 4

Wir betrachten das Handlungsreisendenproblem (TSP). Gegeben ist ein Digraph $G = (V, E)$ mit einer Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{N}$.

- Die Optimierungsvariante vom Typ 2 fragt nach einer kürzesten Rundreise.
- Die Optimierungsvariante vom Typ 1 fragt nach den Kosten einer kürzesten Rundreise.
- Die Entscheidungsvariante hat neben G und c eine Zahl $t \in \mathbb{N}$ als Eingabe und fragt, ob es eine Rundreise mit den Kosten $\leq t$ gibt.

Zeigen Sie, dass aus der effizienten Lösbarkeit[1] einer der drei Varianten die effiziente Lösbarkeit der beiden anderen Varianten folgt.

Hinweis: Eine Rundreise ist ein Hamiltonkreis, d.h. ein Kreis $v_0 v_1 \dots v_n v_0$ in G, wobei $n = |V|$ gilt und $v_0, \dots, v_n$ paarweise verschieden sind. Ein solcher Zyklus durchläuft also alle Knoten in G genau einmal.

[1] Mit "effizienter Lösbarkeit" ist die Existenz eines polynomiell zeitbeschränkten Algorithmus gemeint.