

# THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

## 10. Vorlesung: NP, Teil 2

Hannes Straß

Folien: © Markus Krötzsch, <https://iccl.inf.tu-dresden.de/web/TheoLog2017>, CC BY 3.0 DE

TU Dresden, 9. Mai 2022

# NP-vollständige Probleme

Polynomialzeit-Reduktion:  $\mathbf{P} \leq_p \mathbf{Q}$

NP-vollständige Probleme:

Probleme, die mindestens so schwer sind wie alle anderen Probleme in NP.

Cook und Levin hatten gezeigt:

Wortproblem Polyzeit-NTM  $\leq_p$  **SAT**

Bisher haben wir gezeigt:

**SAT**  $\leq_p$  **CLIQUE**  $\leq_p$  **Unabhängige Menge**

Aufzeichnung startet . . .

# Probleme mit Gewichten und Zahlen

# Teilmengen-Summe

## **Teilmengen-Summe** (subset sum)

**Gegeben:** Eine Menge von Gegenständen  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ , wobei jedem Gegenstand  $a_i$  ein Wert  $v(a_i)$  zugeordnet ist; eine gewünschte Zahl  $z$

**Frage:** Gibt es eine Teilmenge  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a \in T} v(a) = z$ ?

**Anmerkung:** Mehrere Gegenstände können gleiche Werte haben.

# Teilmengen-Summe

## **Teilmengen-Summe** (subset sum)

**Gegeben:** Eine Menge von Gegenständen  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ , wobei jedem Gegenstand  $a_i$  ein Wert  $v(a_i)$  zugeordnet ist; eine gewünschte Zahl  $z$

**Frage:** Gibt es eine Teilmenge  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a \in T} v(a) = z$ ?

**Anmerkung:** Mehrere Gegenstände können gleiche Werte haben.

**Satz:** Teilmengen-Summe ist NP-vollständig.

# Teilmengen-Summe

## Teilmengen-Summe (subset sum)

**Gegeben:** Eine Menge von Gegenständen  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ , wobei jedem Gegenstand  $a_i$  ein Wert  $v(a_i)$  zugeordnet ist; eine gewünschte Zahl  $z$

**Frage:** Gibt es eine Teilmenge  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a \in T} v(a) = z$ ?

**Anmerkung:** Mehrere Gegenstände können gleiche Werte haben.

**Satz:** Teilmengen-Summe ist NP-vollständig.

## Beweis:

- (1) **Teilmengen-Summe**  $\in$  NP haben wir bereits festgestellt.
- (2) NP-Schwere zeigen wir durch Reduktion **SAT**  $\leq_p$  **Teilmengen-Summe**.

# Beispiel

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3)$$

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	
$v(t_1)$	= 1	0	0	0	0	1	0	0	
$v(f_1)$	= 1	0	0	0	0	0	1	0	
$v(t_2)$	=	1	0	0	0	1	0	0	
$v(f_2)$	=		1	0	0	0	0	1	
$v(t_3)$	=			1	0	0	1	0	0
$v(f_3)$	=				1	0	0	0	1
$v(t_4)$	=					1	0	0	1
$v(f_4)$	=						1	0	0
$v(t_5)$	=							1	0
$v(f_5)$	=								1
$v(m_{1,1})$	=						1	0	0
$v(m_{1,2})$	=						1	0	0
$v(m_{2,1})$	=							1	0
$v(m_{3,1})$	=								1
$v(m_{3,2})$	=								1
$v(m_{3,3})$	=								1
$z$	=	1	1	1	1	1	3	2	4



# SAT $\leq_p$ Teilmengen-Summe

**Gegeben:** Formel  $F = (C_1 \wedge \dots \wedge C_k)$  in CNF.  
(o.B.d.A. mit maximal 9 Literalen pro Klausel)

# SAT $\leq_p$ Teilmengen-Summe

**Gegeben:** Formel  $F = (C_1 \wedge \dots \wedge C_k)$  in CNF.

(o.B.d.A. mit maximal 9 Literalen pro Klausel)

Seien  $p_1, \dots, p_n$  die Variablen in  $F$ .

Für jedes  $p_i$  definieren wir Gegenstände  $t_i$  und  $f_i$ :

$$v(t_i) := a_1 \cdots a_n c_1 \cdots c_k \quad \text{wobei}$$
$$a_j := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
$$c_j := \begin{cases} 1 & p_i \text{ kommt in } C_j \text{ vor} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

# SAT $\leq_p$ Teilmengen-Summe

**Gegeben:** Formel  $F = (C_1 \wedge \dots \wedge C_k)$  in CNF.

(o.B.d.A. mit maximal 9 Literalen pro Klausel)

Seien  $p_1, \dots, p_n$  die Variablen in  $F$ .

Für jedes  $p_i$  definieren wir Gegenstände  $t_i$  und  $f_i$ :

$$v(t_i) := a_1 \cdots a_n c_1 \cdots c_k \quad \text{wobei} \quad a_j := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
$$c_j := \begin{cases} 1 & p_i \text{ kommt in } C_j \text{ vor} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$v(f_i) := a_1 \cdots a_n c_1 \cdots c_k \quad \text{wobei} \quad a_j := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
$$c_j := \begin{cases} 1 & \neg p_i \text{ kommt in } C_j \text{ vor} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

# Beispiel

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3)$$

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$v(t_1)$	= 1	0	0	0	0	1	0	0
$v(f_1)$	= 1	0	0	0	0	0	1	0
$v(t_2)$	=	1	0	0	0	1	0	0
$v(f_2)$	=		1	0	0	0	0	1
$v(t_3)$	=			1	0	0	1	0
$v(f_3)$	=				1	0	0	1
$v(t_4)$	=					1	0	0
$v(f_4)$	=						1	0
$v(t_5)$	=							1
$v(f_5)$	=							
$v(m_{1,1})$	=						1	0
$v(m_{1,2})$	=						1	0
$v(m_{2,1})$	=							1
$v(m_{3,1})$	=							
$v(m_{3,2})$	=							
$v(m_{3,3})$	=							
$z$	=	1	1	1	1	1	3	2
							4	

# SAT $\leq_p$ Teilmengen-Summe

Außerdem definieren wir für jede Klausel  $C_i$  genau  $r := |C_i| - 1$  Gegenstände

$m_{i,1}, \dots, m_{i,r}$

mit  $v(m_{i,j}) := c_i \cdots c_k$  wobei  $c_\ell := \begin{cases} 1 & \ell = i \\ 0 & \ell \neq i \end{cases}$

# SAT $\leq_p$ Teilmengen-Summe

Außerdem definieren wir für jede Klausel  $C_i$  genau  $r := |C_i| - 1$  Gegenstände  $m_{i,1}, \dots, m_{i,r}$

mit  $v(m_{i,j}) := c_i \cdots c_k$  wobei  $c_\ell := \begin{cases} 1 & \ell = i \\ 0 & \ell \neq i \end{cases}$

**Definition von  $S$ :** Damit ergibt sich die Menge

$$S := \left\{ t_i, f_i \mid 1 \leq i \leq n \right\} \cup \left\{ m_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq |C_i| - 1 \right\}$$

# SAT $\leq_p$ Teilmengen-Summe

Außerdem definieren wir für jede Klausel  $C_i$  genau  $r := |C_i| - 1$  Gegenstände

$m_{i,1}, \dots, m_{i,r}$

mit  $v(m_{i,j}) := c_i \cdots c_k$  wobei  $c_\ell := \begin{cases} 1 & \ell = i \\ 0 & \ell \neq i \end{cases}$

**Definition von  $S$ :** Damit ergibt sich die Menge

$$S := \left\{ t_i, f_i \mid 1 \leq i \leq n \right\} \cup \left\{ m_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq |C_i| - 1 \right\}$$

**Gesuchte Zahl:** Wir bestimmen die gesuchte Zahl  $z$  wie folgt:

$$z := a_1 \cdots a_n c_1 \cdots c_k \text{ wobei } a_i := 1 \text{ und } c_i := |C_i|$$

# SAT $\leq_p$ Teilmengen-Summe

Außerdem definieren wir für jede Klausel  $C_i$  genau  $r := |C_i| - 1$  Gegenstände  $m_{i,1}, \dots, m_{i,r}$

mit  $v(m_{i,j}) := c_i \cdots c_k$  wobei  $c_\ell := \begin{cases} 1 & \ell = i \\ 0 & \ell \neq i \end{cases}$

**Definition von  $S$ :** Damit ergibt sich die Menge

$$S := \left\{ t_i, f_i \mid 1 \leq i \leq n \right\} \cup \left\{ m_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq |C_i| - 1 \right\}$$

**Gesuchte Zahl:** Wir bestimmen die gesuchte Zahl  $z$  wie folgt:

$$z := a_1 \cdots a_n c_1 \cdots c_k \text{ wobei } a_i := 1 \text{ und } c_i := |C_i|$$

**Behauptung:** Es gibt  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a_i \in T} v(a_i) = z$  gdw.  $F$  erfüllbar ist.



# Beispiel

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_4 \vee p_5 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3)$$

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$v(t_1)$	= 1	0	0	0	0	1	0	0
$v(f_1)$	= 1	0	0	0	0	0	1	0
$v(t_2)$	=	1	0	0	0	1	0	0
$v(f_2)$	=		1	0	0	0	0	1
$v(t_3)$	=			1	0	0	1	0
$v(f_3)$	=				1	0	0	1
$v(t_4)$	=					1	0	0
$v(f_4)$	=						1	0
$v(t_5)$	=							1
$v(f_5)$	=							
$v(m_{1,1})$	=						1	0
$v(m_{1,2})$	=						1	0
$v(m_{2,1})$	=							1
$v(m_{3,1})$	=							
$v(m_{3,2})$	=							
$v(m_{3,3})$	=							
$z$	=	1	1	1	1	1	3	2
							4	

# NP-Vollständigkeit von Teilmengen-Summe

**Behauptung:** Wenn  $F$  erfüllbar ist, dann gibt es  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a_i \in T} v(a_i) = z$ .

# NP-Vollständigkeit von Teilmengen-Summe

**Behauptung:** Wenn  $F$  erfüllbar ist, dann gibt es  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a_i \in T} v(a_i) = z$ .

- Sei  $w$  eine erfüllende Belegung für  $F$ .

# NP-Vollständigkeit von Teilmengen-Summe

**Behauptung:** Wenn  $F$  erfüllbar ist, dann gibt es  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a_i \in T} v(a_i) = z$ .

- Sei  $w$  eine erfüllende Belegung für  $F$ .
- Wir definieren:

$$T_1 := \left\{ t_i \mid w(p_i) = \mathbf{1}, 1 \leq i \leq m \right\} \cup \left\{ f_i \mid w(p_i) = \mathbf{0}, 1 \leq i \leq m \right\}$$

# NP-Vollständigkeit von Teilmengen-Summe

**Behauptung:** Wenn  $F$  erfüllbar ist, dann gibt es  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a_i \in T} v(a_i) = z$ .

- Sei  $w$  eine erfüllende Belegung für  $F$ .
- Wir definieren:

$$T_1 := \left\{ t_i \mid w(p_i) = \mathbf{1}, 1 \leq i \leq m \right\} \cup \left\{ f_i \mid w(p_i) = \mathbf{0}, 1 \leq i \leq m \right\}$$

- Sei  $r_i$  jeweils die Zahl der von  $w$  erfüllten Literale in  $C_i$ . (Offenbar ist  $r_i \geq 1$  für alle  $i$ .)  
Wir definieren:

$$T_2 := \left\{ m_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq |C_i| - r_i \right\}$$

# NP-Vollständigkeit von Teilmengen-Summe

**Behauptung:** Wenn  $F$  erfüllbar ist, dann gibt es  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a_i \in T} v(a_i) = z$ .

- Sei  $w$  eine erfüllende Belegung für  $F$ .
- Wir definieren:

$$T_1 := \left\{ t_i \mid w(p_i) = \mathbf{1}, 1 \leq i \leq m \right\} \cup \left\{ f_i \mid w(p_i) = \mathbf{0}, 1 \leq i \leq m \right\}$$

- Sei  $r_i$  jeweils die Zahl der von  $w$  erfüllten Literale in  $C_i$ . (Offenbar ist  $r_i \geq 1$  für alle  $i$ .)  
Wir definieren:

$$T_2 := \left\{ m_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq |C_i| - r_i \right\}$$

- Die gesuchte Menge von Gegenständen ist  $T := T_1 \cup T_2$ .
- Damit folgt:  $\sum_{s \in T} v(s) = z$ .

# NP-Vollständigkeit von Teilmengen-Summe

**Behauptung:** Gibt es  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a_i \in T} v(a_i) = z$ , dann ist  $F$  erfüllbar.

# NP-Vollständigkeit von Teilmengen-Summe

**Behauptung:** Gibt es  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a_i \in T} v(a_i) = z$ , dann ist  $F$  erfüllbar.

Sei  $T \subseteq S$  die gesuchte Menge mit  $\sum_{s \in T} v(s) = z$ .



# NP-Vollständigkeit von Teilmengen-Summe

**Behauptung:** Gibt es  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a_i \in T} v(a_i) = z$ , dann ist  $F$  erfüllbar.

Sei  $T \subseteq S$  die gesuchte Menge mit  $\sum_{s \in T} v(s) = z$ .

Wir definieren  $w(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_i \in T, \\ 0 & \text{falls } f_i \in T. \end{cases}$

Die Belegung  $w$  ist wohldefiniert, da für alle  $i$  gilt:

$t_i \in T$  oder  $f_i \in T$ , aber nicht beides.

# NP-Vollständigkeit von Teilmengen-Summe

**Behauptung:** Gibt es  $T \subseteq S$  mit  $\sum_{a_i \in T} v(a_i) = z$ , dann ist  $F$  erfüllbar.

Sei  $T \subseteq S$  die gesuchte Menge mit  $\sum_{s \in T} v(s) = z$ .

Wir definieren  $w(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t_i \in T, \\ 0 & \text{falls } f_i \in T. \end{cases}$

Die Belegung  $w$  ist wohldefiniert, da für alle  $i$  gilt:

$t_i \in T$  oder  $f_i \in T$ , aber nicht beides.

Außerdem muss für jede Klausel ein Literal auf **1** abgebildet werden, da die entsprechenden Hilfszahlen  $m_{i,j} \in S$  zusammen nicht die geforderte Zahl an Literalen pro Klausel erreichen. □

# Das Rucksack-Problem

## **Rucksack** (Knapsack)

**Gegeben:** Eine Menge von Gegenständen  $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ , wobei jedem Gegenstand  $a_i$  ein Wert  $v(a_i)$  und ein Gewicht  $g(a_i)$  zugeordnet ist; außerdem ein Mindestwert  $w$  und ein Gewichtslimit  $\ell$ .

**Frage:** Gibt es eine Teilmenge  $T \subseteq G$ , so dass

- $\sum_{a \in T} g(a) \leq \ell$  und
- $\sum_{a \in T} v(a) \geq w$ ?

# Das Rucksack-Problem

## **Rucksack** (Knapsack)

**Gegeben:** Eine Menge von Gegenständen  $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ , wobei jedem Gegenstand  $a_i$  ein Wert  $v(a_i)$  und ein Gewicht  $g(a_i)$  zugeordnet ist; außerdem ein Mindestwert  $w$  und ein Gewichtslimit  $\ell$ .

**Frage:** Gibt es eine Teilmenge  $T \subseteq G$ , so dass

- $\sum_{a \in T} g(a) \leq \ell$  und
- $\sum_{a \in T} v(a) \geq w$ ?

**Satz:** **Rucksack** ist NP-vollständig.

# Das Rucksack-Problem

## Rucksack (Knapsack)

**Gegeben:** Eine Menge von Gegenständen  $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ , wobei jedem Gegenstand  $a_i$  ein Wert  $v(a_i)$  und ein Gewicht  $g(a_i)$  zugeordnet ist; außerdem ein Mindestwert  $w$  und ein Gewichtslimit  $\ell$ .

**Frage:** Gibt es eine Teilmenge  $T \subseteq G$ , so dass

- $\sum_{a \in T} g(a) \leq \ell$  und
- $\sum_{a \in T} v(a) \geq w$ ?

**Satz:** Rucksack ist NP-vollständig.

## Beweis:

(1) **Rucksack**  $\in$  NP: Das Zertifikat ist  $T$

(2) **Rucksack** ist NP-schwer:

durch Reduktion **Teilsummen-Summe**  $\leq_p$  **Rucksack**

# Teilmengen-Summe $\leq_p$ Rucksack

**Gegeben:** Eine Instanz von **Teilmengen-Summe**

(Menge von Gegenständen  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  mit Wert  $v(a_i)$ ; gewünschte Zahl  $z$ )

# Teilmengen-Summe $\leq_p$ Rucksack

**Gegeben:** Eine Instanz von **Teilmengen-Summe**

(Menge von Gegenständen  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  mit Wert  $v(a_i)$ ; gewünschte Zahl  $z$ )

**Daraus konstruieren wir:**

- $G := \{1, \dots, n\}$ : Menge der Gegenstände
- Für alle  $i \in G$  setzen wir:  $v(i) = g(i) = v(a_i)$
- Zielwert  $w := z$  und Gewichtslimit  $\ell := z$

Offensichtlich ist diese Übersetzung **polynomiell**.

# Teilmengen-Summe $\leq_p$ Rucksack

**Gegeben:** Eine Instanz von **Teilmengen-Summe**

(Menge von Gegenständen  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  mit Wert  $v(a_i)$ ; gewünschte Zahl  $z$ )

**Daraus konstruieren wir:**

- $G := \{1, \dots, n\}$ : Menge der Gegenstände
- Für alle  $i \in G$  setzen wir:  $v(i) = g(i) = v(a_i)$
- Zielwert  $w := z$  und Gewichtslimit  $\ell := z$

Offensichtlich ist diese Übersetzung **polynomiell**.

Damit gilt für jede Teilmenge  $T \subseteq G$ :

$$\sum_{i \in T} v(a_i) = z \quad \text{gdw.} \quad \begin{array}{l} \sum_{i \in T} v(i) \geq w = z \\ \sum_{i \in T} g(i) \leq \ell = z \end{array}$$

$\leadsto$  Die Reduktion ist **korrekt**.

□



# Quiz: P & NP & Reduktionen

- **SAT:** Gegeben eine aussagenlogische Formel, ist diese erfüllbar?
- **Rucksack:** Gegeben eine Menge von Gegenständen  $G$  jeweils mit Wert und Gewicht, ein Mindestwert  $w$  und ein Gewichtslimit  $\ell$ , gibt es eine Teilmenge  $T \subseteq G$ , sodass die Gegenstände in  $T$  mindestens Wert  $w$  erreichen, ohne Gewicht  $\ell$  zu überschreiten?
- **CLIQUE:** Gegeben ein Graph  $G$  und eine Zahl  $k$ , hat  $G$  eine Clique (einen Teilgraphen, bei dem alle Knoten miteinander verbunden sind) der Größe  $k$ ?

**Quiz:** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? ...

# Pseudopolynomielle Probleme

# Eine polynomielle Lösung für **Rucksack**

Mittels *dynamischer Programmierung* kann man **Rucksack** in der Zeit  $O(n\ell)$  lösen

## **Initialisierung:**

Erzeuge eine  $(\ell + 1) \times (n + 1)$ -Matrix  $M$

Setze  $M(g, 0) = M(0, i) = 0$  für alle  $1 \leq g \leq \ell$  und  $1 \leq i \leq n$ .

# Beispiel

**Eingabe:**  $G := \{1, 2, 3, 4\}$  mit

Werten:  $v(1) := 1$   $v(2) := 3$   $v(3) := 4$   $v(4) := 2$

Gewichten:  $g(1) := 1$   $g(2) := 1$   $g(3) := 3$   $g(4) := 2$

**Gewichtslimit:**  $\ell := 5$

**Mindestwert:**  $w := 7$

Gewichts- limit $g$	max. Wert für $\leq i$ Gegenstände				
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0					
1					
2					
3					
4					
5					

Initialisiere  $M(g, 0) = M(0, i) = 0$  für alle  $1 \leq g \leq \ell$  und  $1 \leq i \leq n$ .

# Beispiel

**Eingabe:**  $G := \{1, 2, 3, 4\}$  mit

Werten:  $v(1) := 1$   $v(2) := 3$   $v(3) := 4$   $v(4) := 2$

Gewichten:  $g(1) := 1$   $g(2) := 1$   $g(3) := 3$   $g(4) := 2$

**Gewichtslimit:**  $\ell := 5$

**Mindestwert:**  $w := 7$

Gewichts- limit $g$	max. Wert für $\leq i$ Gegenstände				
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0	0	0	0	0	0
1	0				
2	0				
3	0				
4	0				
5	0				

Initialisiere  $M(g, 0) = M(0, i) = 0$  für alle  $1 \leq g \leq \ell$  und  $1 \leq i \leq n$ .

# Eine polynomielle Lösung für **Rucksack**

Mittels dynamischer Programmierung kann man **Rucksack** in der Zeit  $O(n\ell)$  lösen

## **Initialisierung:**

Erzeuge eine  $(\ell + 1) \times (n + 1)$ -Matrix  $M$

Setze  $M(g, 0) = M(0, i) = 0$  für alle  $1 \leq g \leq \ell$  und  $1 \leq i \leq n$ .

# Eine polynomielle Lösung für **Rucksack**

Mittels **dynamischer Programmierung** kann man **Rucksack** in der Zeit  $O(n\ell)$  lösen

## **Initialisierung:**

Erzeuge eine  $(\ell + 1) \times (n + 1)$ -Matrix  $M$

Setze  $M(g, 0) = M(0, i) = 0$  für alle  $1 \leq g \leq \ell$  und  $1 \leq i \leq n$ .

**Berechnung:** Für  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  berechne  $M(g, i + 1)$  als

$$M(g, i + 1) := \max(M(g, i), M(g - g(i + 1), i) + v(i + 1))$$

(Falls  $g - g(i + 1) < 0$ , dann verwenden wir immer  $M(g, i)$ .)

$M(g, i)$  ... „größter Gesamtwert unter den ersten  $i$  Gegenständen bei Einhaltung des Gewichtslimits  $g$ “

**Akzeptanz:** Akzeptiere, falls  $M$  einen Eintrag  $\geq w$  hat.

# Beispiel

**Eingabe:**  $G := \{1, 2, 3, 4\}$  mit

Werten:  $v(1) := 1$   $v(2) := 3$   $v(3) := 4$   $v(4) := 2$

Gewichten:  $g(1) := 1$   $g(2) := 1$   $g(3) := 3$   $g(4) := 2$

**Gewichtslimit:**  $\ell := 5$

**Mindestwert:**  $w := 7$

Gewichts- limit $g$	max. Wert für $\leq i$ Gegenstände				
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0	0	0	0	0	0
1	0				
2	0				
3	0				
4	0				
5	0				

$$M(g, i + 1) := \max(M(g, i), M(g - g(i + 1), i) + v(i + 1))$$



# Beispiel

**Eingabe:**  $G := \{1, 2, 3, 4\}$  mit

Werten:  $v(1) := 1$   $v(2) := 3$   $v(3) := 4$   $v(4) := 2$

Gewichten:  $g(1) := 1$   $g(2) := 1$   $g(3) := 3$   $g(4) := 2$

**Gewichtslimit:**  $\ell := 5$

**Mindestwert:**  $w := 7$

Gewichts- limit $g$	max. Wert für $\leq i$ Gegenstände				
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0	0	0	0	0	0
1	0	1			
2	0	1			
3	0	1			
4	0	1			
5	0	1			

$$M(g, i + 1) := \max(M(g, i), M(g - g(i + 1), i) + v(i + 1))$$

# Beispiel

**Eingabe:**  $G := \{1, 2, 3, 4\}$  mit

Werten:  $v(1) := 1$   $v(2) := 3$   $v(3) := 4$   $v(4) := 2$

Gewichten:  $g(1) := 1$   $g(2) := 1$   $g(3) := 3$   $g(4) := 2$

**Gewichtslimit:**  $\ell := 5$

**Mindestwert:**  $w := 7$

Gewichts- limit $g$	max. Wert für $\leq i$ Gegenstände				
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	3		
2	0	1			
3	0	1			
4	0	1			
5	0	1			

$$M(g, i + 1) := \max(M(g, i), M(g - g(i + 1), i) + v(i + 1))$$

# Beispiel

**Eingabe:**  $G := \{1, 2, 3, 4\}$  mit

Werten:  $v(1) := 1$   $v(2) := 3$   $v(3) := 4$   $v(4) := 2$

Gewichten:  $g(1) := 1$   $g(2) := 1$   $g(3) := 3$   $g(4) := 2$

**Gewichtslimit:**  $\ell := 5$

**Mindestwert:**  $w := 7$

Gewichts- limit $g$	max. Wert für $\leq i$ Gegenstände				
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	3		
2	0	1	4		
3	0	1			
4	0	1			
5	0	1			

$$M(g, i + 1) := \max(M(g, i), M(g - g(i + 1), i) + v(i + 1))$$

# Beispiel

**Eingabe:**  $G := \{1, 2, 3, 4\}$  mit

Werten:  $v(1) := 1$   $v(2) := 3$   $v(3) := 4$   $v(4) := 2$

Gewichten:  $g(1) := 1$   $g(2) := 1$   $g(3) := 3$   $g(4) := 2$

**Gewichtslimit:**  $\ell := 5$

**Mindestwert:**  $w := 7$

Gewichts- limit $g$	max. Wert für $\leq i$ Gegenstände				
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	3		
2	0	1	4		
3	0	1	4		
4	0	1			
5	0	1			

$$M(g, i + 1) := \max(M(g, i), M(g - g(i + 1), i) + v(i + 1))$$

# Beispiel

**Eingabe:**  $G := \{1, 2, 3, 4\}$  mit

Werten:  $v(1) := 1$   $v(2) := 3$   $v(3) := 4$   $v(4) := 2$

Gewichten:  $g(1) := 1$   $g(2) := 1$   $g(3) := 3$   $g(4) := 2$

**Gewichtslimit:**  $\ell := 5$

**Mindestwert:**  $w := 7$

Gewichts- limit $g$	max. Wert für $\leq i$ Gegenstände				
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	3		
2	0	1	4		
3	0	1	4		
4	0	1	4		
5	0	1			

$$M(g, i + 1) := \max(M(g, i), M(g - g(i + 1), i) + v(i + 1))$$

# Beispiel

**Eingabe:**  $G := \{1, 2, 3, 4\}$  mit

Werten:  $v(1) := 1$   $v(2) := 3$   $v(3) := 4$   $v(4) := 2$

Gewichten:  $g(1) := 1$   $g(2) := 1$   $g(3) := 3$   $g(4) := 2$

**Gewichtslimit:**  $\ell := 5$

**Mindestwert:**  $w := 7$

Gewichts- limit $g$	max. Wert für $\leq i$ Gegenstände				
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	3		
2	0	1	4		
3	0	1	4		
4	0	1	4		
5	0	1	4		

$$M(g, i + 1) := \max(M(g, i), M(g - g(i + 1), i) + v(i + 1))$$

# Beispiel

**Eingabe:**  $G := \{1, 2, 3, 4\}$  mit

Werten:  $v(1) := 1$   $v(2) := 3$   $v(3) := 4$   $v(4) := 2$

Gewichten:  $g(1) := 1$   $g(2) := 1$   $g(3) := 3$   $g(4) := 2$

**Gewichtslimit:**  $\ell := 5$

**Mindestwert:**  $w := 7$

Gewichts- limit $g$	max. Wert für $\leq i$ Gegenstände				
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	3	3	3
2	0	1	4	4	4
3	0	1	4	4	5
4	0	1	4	7	7
5	0	1	4	8	8

$$M(g, i + 1) := \max(M(g, i), M(g - g(i + 1), i) + v(i + 1))$$

# P = NP?

Zusammenfassung:

- **Rucksack** ist NP-vollständig
- **Rucksack** ist mittels Dynamischer Programmierung in Zeit  $O(n\ell)$  lösbar

## Rucksack (Knapsack)

**Gegeben:** Eine Menge von Gegenständen  $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ , wobei jedem Gegenstand  $a_i$  ein Wert  $v(a_i)$  und ein Gewicht  $g(a_i)$  zugeordnet ist; außerdem ein Mindestwert  $w$  und ein Gewichtslimit  $\ell$ .

**Frage:** Gibt es eine Teilmenge  $T \subseteq G$ , so dass

- $\sum_{a \in T} g(a) \leq \ell$  und
- $\sum_{a \in T} v(a) \geq w$ ?



# P = NP?

Zusammenfassung:

- **Rucksack** ist NP-vollständig
- **Rucksack** ist mittels Dynamischer Programmierung in Zeit  $O(n\ell)$  lösbar

## Rucksack (Knapsack)

**Gegeben:** Eine Menge von Gegenständen  $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ , wobei jedem Gegenstand  $a_i$  ein Wert  $v(a_i)$  und ein Gewicht  $g(a_i)$  zugeordnet ist; außerdem ein Mindestwert  $w$  und ein Gewichtslimit  $\ell$ .

**Frage:** Gibt es eine Teilmenge  $T \subseteq G$ , so dass

- $\sum_{a \in T} g(a) \leq \ell$  und
- $\sum_{a \in T} v(a) \geq w$ ?

Haben wir also gezeigt, dass P = NP?

# Pseudopolynomielle Probleme

Unser Algorithmus zeigt nicht **Rucksack**  $\in P$ !

- Die Eingabe von **Rucksack** hat die Länge  $O(n + \log w + \log \ell)$ .
- Die Zeit  $O(n\ell)$  ist daher **nicht** polynomiell bzgl. der Eingabelänge.

# Pseudopolynomielle Probleme

Unser Algorithmus zeigt nicht **Rucksack**  $\in P$ !

- Die Eingabe von **Rucksack** hat die Länge  $O(n + \log w + \log \ell)$ .
- Die Zeit  $O(n\ell)$  ist daher **nicht** polynomiell bzgl. der Eingabelänge.

Ein Problem ist in **pseudopolynomieller Zeit**, wenn es durch eine DTM gelöst wird, die polynomiell zeitbeschränkt ist bzgl. der Eingabelänge **und** des Betrages aller Zahlen in der Eingabe.

**Äquivalent:** Ein Problem ist pseudopolynomiell, wenn es in PTime liegt, wenn man alle Zahlen **unär** kodiert.

# Pseudopolynomielle Probleme

Unser Algorithmus zeigt nicht **Rucksack**  $\in P$ !

- Die Eingabe von **Rucksack** hat die Länge  $O(n + \log w + \log \ell)$ .
- Die Zeit  $O(n\ell)$  ist daher **nicht** polynomiell bzgl. der Eingabelänge.

Ein Problem ist in **pseudopolynomieller Zeit**, wenn es durch eine DTM gelöst wird, die polynomiell zeitbeschränkt ist bzgl. der Eingabelänge **und** des Betrages aller Zahlen in der Eingabe.

**Äquivalent:** Ein Problem ist pseudopolynomiell, wenn es in PTime liegt, wenn man alle Zahlen **unär** kodiert.

**Beispiel: Rucksack** ist pseudopolynomiell: Beschränkt man das Problem auf Instanzen mit  $\ell \leq p(n)$  für ein Polynom  $p$ , so erhält man ein Problem in P (wobei  $n$  die Zahl der Gegenstände ist).

# Starke NP-Vollständigkeit

Probleme, welche selbst dann noch NP-vollständig sind, wenn man alle Zahlen unär kodiert, heißen **stark NP-vollständig**.

# Starke NP-Vollständigkeit

Probleme, welche selbst dann noch NP-vollständig sind, wenn man alle Zahlen unär kodiert, heißen **stark NP-vollständig**.

## Beispiele:

- **SAT** ist stark NP-vollständig (keine Zahlen in der Eingabe)
- **CLIQUE** ist stark NP-vollständig
- ...

# Starke NP-Vollständigkeit

Probleme, welche selbst dann noch NP-vollständig sind, wenn man alle Zahlen unär kodiert, heißen **stark NP-vollständig**.

## Beispiele:

- **SAT** ist stark NP-vollständig (keine Zahlen in der Eingabe)
- **CLIQUE** ist stark NP-vollständig
- ...

## Beispiele:

- **Rucksack** ist pseudopolynomiell
- **Teilmengen-Summe** ist pseudopolynomiell

# Starke NP-Vollständigkeit

Probleme, welche selbst dann noch NP-vollständig sind, wenn man alle Zahlen unärkodiert, heißen **stark NP-vollständig**.

## Beispiele:

- **SAT** ist stark NP-vollständig (keine Zahlen in der Eingabe)
- **CLIQUE** ist stark NP-vollständig
- ...

## Beispiele:

- **Rucksack** ist pseudopolynomiell
- **Teilmengen-Summe** ist pseudopolynomiell

**Anmerkung:** Die Reduktion **SAT**  $\leq_p$  **Teilmengen-Summe** erzeugt eine polynomielle Instanz, bei der die Beträge der Zahlen exponentiell groß sind.



# Fake-News erkennen (1)

Immer wieder gibt es Berichte darüber, dass irgendein neuartiges Berechnungsmodell oder ausgefallene physikalische Anordnung NP-vollständige Probleme in polynomieller Zeit lösen könne . . .

# Fake-News erkennen (1)

Immer wieder gibt es Berichte darüber, dass irgendein neuartiges Berechnungsmodell oder ausgefallene physikalische Anordnung NP-vollständige Probleme in polynomieller Zeit lösen könne . . .

↪ Meist lässt sich leicht sehen, wo der Fehler liegt.

## Typische Kontrollfragen:

Ist das Problem pseudopolynomiell?  
Wie sind Zahlenbeträge kodiert?

**Beispiel:** Molekulare Anordnungen zum Lösen von **Teilmengen-Summe**, wobei Zahlen durch eine entsprechende Zahl an Molekülen kodiert werden.

## Fake-News erkennen (2)

Immer wieder gibt es Berichte darüber, dass irgendein neuartiges Berechnungsmodell oder ausgefallene physikalische Anordnung NP-vollständige Probleme in polynomieller Zeit lösen könne . . .

↪ Meist lässt sich leicht sehen, wo der Fehler liegt.

### Typische Kontrollfragen:

Wächst der neuartige Computer mit dem Problem?  
Ist dieses Wachstum exponentiell?

**Beispiel:** DNS-Rechner lösen Optimierungsaufgaben, aber müssen alle (exponentiell viele) möglichen Lösungen als DNS-Sequenz kodieren.

## Fake-News erkennen (3)

Immer wieder gibt es Berichte darüber, dass irgendein neuartiges Berechnungsmodell oder ausgefallene physikalische Anordnung NP-vollständige Probleme in polynomieller Zeit lösen könne . . .

↪ Meist lässt sich leicht sehen, wo der Fehler liegt.

### Typische Kontrollfragen:

Wird das Problem wirklich gelöst oder handelt es sich eher um ein Approximationsverfahren?

Ist klar, was ein „Berechnungsschritt“ ist und ist deren Zahl wirklich polynomiell?

**Beispiel:** Ein Schaltkreis mit Rückkopplungen, welcher „in der Regel“ zu einer „guten“ Lösung eines NP-vollständigen Problems konvergiert, und das „nach kurzer Zeit.“

# NP und andere Klassen

# P vs. NP

Bis heute ist nicht bekannt, ob  $P \neq NP$  gilt oder nicht.

- Intuitiv gefragt: „Wenn es einfach ist, eine mögliche Lösung für ein Problem zu prüfen, ist es dann auch einfach, eine zu finden?“
- Übertrieben: „Can creativity be automated?“ (Wigderson, 2006)
- Seit über 40 Jahren ungelöst
- Eines der größten offenen Probleme der Informatik und Mathematik unserer Zeit
- 1.000.000 USD Preisgeld für die Lösung („Millenium Problem“)

# Mögliche Konsequenzen

Falls  $P = NP$ , dann gilt

- $NP = coNP$  (warum?)
- und jedes nichttriviale Problem in  $P$  ist  $NP$ -vollständig (warum?)

# Mögliche Konsequenzen

Falls  $P = NP$ , dann gilt

- $NP = coNP$  (warum?)
- und jedes nichttriviale Problem in  $P$  ist  $NP$ -vollständig (warum?)

Falls  $P \neq NP$ , dann gilt

- $P \neq coNP$  (warum?)
- $L \neq NP$  (warum?)
- $P \neq PSpace$  (warum?)
- kein  $NP$ -vollständiges Problem ist in  $P$  (warum?)



# Noch schwerere Fragen

Selbst wenn  $P \neq NP$  bewiesen werden sollte, gäbe es noch viele offene Fragen ...

# Noch schwerere Fragen

Selbst wenn  $P \neq NP$  bewiesen werden sollte, gäbe es noch viele offene Fragen ...

$NP = coNP$ ? Falls es für die lösbaren Instanzen eines Problems kurze Zertifikate gibt, gibt es dann immer auch kurze Zertifikate für die Unlösbarkeit von Instanzen?

- Die meisten Expert:innen glauben das nicht.
- Falls die Antwort „nein“ lautet, dann folgt  $P \neq NP$ .

# Noch schwerere Fragen

Selbst wenn  $P \neq NP$  bewiesen werden sollte, gäbe es noch viele offene Fragen ...

$NP = coNP$ ? Falls es für die lösbaren Instanzen eines Problems kurze Zertifikate gibt, gibt es dann immer auch kurze Zertifikate für die Unlösbarkeit von Instanzen?

- Die meisten Expert:innen glauben das nicht.
- Falls die Antwort „nein“ lautet, dann folgt  $P \neq NP$ .

$P = NP \cap coNP$ ? Falls es für die Lösbarkeit und die Unlösbarkeit eines Problems kurze Zertifikate gibt, ist das Problem dann effizient lösbar?

- Die meisten Expert:innen glauben das nicht.
- Falls die Antwort „nein“ lautet, dann folgt  $P \neq NP$ .
- Ist die Antwort „ja“ und zudem  $P \neq NP$ , so folgt  $NP \neq coNP$ .

# Der Satz von Ladner

## Drei mögliche Welten:

- (1)  $P = NP$ : Jedes NP-vollständige Problem ist in  $P$ .
- (2)  $P \neq NP$ : Kein NP-vollständiges Problem ist in  $P$ .
  - (2.a) Jedes NP-Problem, welches nicht NP-vollständig ist, liegt in  $P$ .
  - (2.b) Es gibt Probleme, die nicht NP-vollständig sind und dennoch nicht in  $P$  liegen.

# Der Satz von Ladner

## Drei mögliche Welten:

- (1)  $P = NP$ : Jedes NP-vollständige Problem ist in  $P$ .
- (2)  $P \neq NP$ : Kein NP-vollständiges Problem ist in  $P$ .
  - (2.a) Jedes NP-Problem, welches nicht NP-vollständig ist, liegt in  $P$ .
  - (2.b) Es gibt Probleme, die nicht NP-vollständig sind und dennoch nicht in  $P$  liegen.

Richard E. Ladner hat gezeigt, dass Fall (2.a) unmöglich ist:

**Satz (Ladner):** Falls  $P \neq NP$ , dann gibt es Probleme in  $NP$ , die weder NP-vollständig sind noch in  $P$  liegen.

Diese Probleme heißen **NP-intermediate**

# Der Satz von Ladner

## Drei mögliche Welten:

- (1)  $P = NP$ : Jedes NP-vollständige Problem ist in P.
- (2)  $P \neq NP$ : Kein NP-vollständiges Problem ist in P.
  - (2.a) Jedes NP-Problem, welches nicht NP-vollständig ist, liegt in P.
  - (2.b) Es gibt Probleme, die nicht NP-vollständig sind und dennoch nicht in P liegen.

Richard E. Ladner hat gezeigt, dass Fall (2.a) unmöglich ist:

**Satz (Ladner):** Falls  $P \neq NP$ , dann gibt es Probleme in NP, die weder NP-vollständig sind noch in P liegen.

Diese Probleme heißen **NP-intermediate** – wenn  $P \neq NP$  gilt, dann sollte es viele davon geben ... aber wir kennen kaum Kandidaten:

- Faktorisierung (**Faktor-7** und ähnliche).
- Ermitteln, ob zwei Graphen isomorph (gleich bis auf Umbenennung) sind.

# Zusammenfassung und Ausblick

## **SAT $\leq_p$ Teilmengen-Summe $\leq_p$ Rucksack**

Pseudopolynomielle Probleme werden einfacher, wenn man den Betrag der Zahlen in der Eingabe polynomiell beschränkt.

Offene Fragen (geordnet von „leicht“ nach schwer): „L  $\neq$  NP?“, „P  $\neq$  PSpace?“, „P  $\neq$  NP?“, „NP  $\neq$  coNP?“ „P  $\neq$  NP  $\cap$  coNP?“

Es sollte eigentlich eine Menge Probleme geben, die weder in P liegen, noch NP-vollständig sind.

Was erwartet uns als nächstes?

- NL
- Komplexität jenseits von NP
- Spiele