



## Formale Systeme

### 1. Übungsblatt

Wintersemester 2023/24

#### Aufgabe zur Selbstkontrolle

S1) Es sei  $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$  und  $\Sigma_2 = \{0, 1\}$ . Beschreiben Sie folgende Mengen verbal oder durch Aufzählung:

$$\Sigma_1^*, \Sigma_1^+, \Sigma_1^2, \Sigma_1 \circ (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*, \mathcal{P}(\Sigma_1), \mathcal{P}(\Sigma_1^*)$$

S2) Beschreiben Sie folgende Mengen, die über die Operationen Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern gebildet werden, verbal oder durch Aufzählung:

$$\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}, \{a\} \circ \{b\} \circ \{c\}, \{a\} \cup \{b\} \circ \{a\} \cup \{b\}, \{a\}^*, (\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\})^*, \\ (\{a\} \circ \{b\} \circ \{c\})^*, \{a\} \cup \{a\}^* \circ \{b\}, (\{0\} \cup \{1\})^*, (\{1\} \cup \{1\} \circ \{0\})^*, \\ (\{0\} \cup \{1\})^* \circ \{0\} \circ \{0\} \circ (\{0\} \cup \{1\})^*$$

#### Aufgabe 1

Gegeben sind ein beliebiges Alphabet  $\Sigma$  und die Sprachen  $L_1, L_2, L_3, L_4 \subseteq \Sigma^*$ . Zeigen Sie, dass die Operationen  $\cup$ ,  $\circ$  und  $*$  monoton sind, d.h. für  $L_1 \subseteq L_3$  und  $L_2 \subseteq L_4$  gilt:

- $L_1 \cup L_2 \subseteq L_3 \cup L_4$
- $L_1 \circ L_2 \subseteq L_3 \circ L_4$
- $L_1^* \subseteq L_3^*$

#### Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Identitäten. Dabei sind  $L, L_1, L_2, L_3$  beliebige Sprachen.

- $L_1 \circ (L_2 \cup L_3) = L_1 \circ L_2 \cup L_1 \circ L_3$
- $(\{a\} \circ \{b\} \cup \{a\})^* \circ \{a\} = \{a\} \circ (\{b\} \circ \{a\} \cup \{a\})^*$
- $(\{a\} \cup \{b\})^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}, (\{\varepsilon\} \cup L)^* = L^*, (L^*)^* = L^*$
- $(L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$
- $L \circ L^* = L^+, L^* \circ L^* = L^*, L^* \cup L = L^*$

### Aufgabe 3

Gegeben ist die Grammatik  $G = \langle V, \Sigma, P, S \rangle$  mit  $V = \{S, B\}$ ,  $\Sigma = \{a, b, c\}$  und  $P = \{S \rightarrow aSBc, S \rightarrow abc, cB \rightarrow B, cB \rightarrow Bc, bB \rightarrow bb\}$ .

- Von welchem maximalen Typ ist  $G$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie drei Wörter  $w$  der Sprache  $L(G)$ . Begründen Sie Ihre Antwort.
- Gilt  $\varepsilon \in L(G)$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Beschreiben Sie die durch  $G$  erzeugte Sprache  $L(G)$ .

### Aufgabe 4

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Untersuchen Sie die folgenden Tupel daraufhin, ob sie eine Grammatik definieren. Wenn das der Fall ist, geben Sie jeweils den maximalen Chomsky-Typ der Grammatik an und begründen Sie die Einordnung.

- $G_1 = \langle V_1, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$  mit  $V_1 = \{S_1, A\}$  und  $P_1 = \{\varepsilon \rightarrow b, S_1 \rightarrow Ab\}$
- $G_2 = \langle V_2, \Sigma, P_2, S_2 \rangle$  mit  $V_2 = \{S_2\}$  und  $P_2 = \{S_2 \rightarrow aS_2b, S_2 \rightarrow \varepsilon\}$
- $G_3 = \langle V_3, \Sigma, P_3, S_3 \rangle$  mit  $V_3 = \{S_3, X, Y\}$  und  $P_3 = \{XY \rightarrow Y, S_3 \rightarrow aYb, S_3 \rightarrow XY, Y \rightarrow a\}$
- $G_4 = \langle V_4, \Sigma, P_4, S_4 \rangle$  mit  $V_4 = \{S_4, X, Y\}$  und  $P_4 = \{S_4 \rightarrow aY, X \rightarrow a, Y \rightarrow bS_4, Y \rightarrow b, Y \rightarrow bX\}$
- $G_5 = \langle V_5, \Sigma, P_5, S_5 \rangle$  mit  $V_5 = \{S_5, X, Y, Z\}$  und  $P_5 = \{X \rightarrow b, Y \rightarrow aYYb, aY \rightarrow aZ, ZY \rightarrow ZX, S_5 \rightarrow Y, Z \rightarrow a\}$
- $G_6 = \langle V_6, \Sigma, P_6, S_6 \rangle$  mit  $V_6 = \{S_6, W, X, Y, Z\}$  und  $P_6 = \{X \rightarrow b, Y \rightarrow aYYb, aY \rightarrow aZ, ZY \rightarrow ZX, S_6 \rightarrow Y, S_6 \rightarrow \varepsilon, Z \rightarrow a, W \rightarrow S_6\}$

### Aufgabe 5

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Gegeben sind die Grammatiken  $G_k$  mit  $1 \leq k \leq 4$ :

- $G_1 = \langle V_1, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$  mit  $V_1 = \{S_1, T\}$  und  $P_1 = \{S_1 \rightarrow aT, S_1 \rightarrow \varepsilon, T \rightarrow S_1b\}$
  - $G_2 = \langle V_2, \Sigma, P_2, S_2 \rangle$  mit  $V_2 = \{S_2, A, B\}$  und  $P_2 = \{S_2 \rightarrow S_2AS_2, S_2 \rightarrow S_2BBS_2, S_2 \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow a, B \rightarrow b\}$
  - $G_3 = \langle V_3, \Sigma, P_3, S_3 \rangle$  mit  $V_3 = \{S_3, A, B\}$  und  $P_3 = \{S_3 \rightarrow A, S_3 \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow ab, A \rightarrow aBb, aB \rightarrow aaBb, aB \rightarrow a\}$
  - $G_4 = \langle V_4, \Sigma, P_4, S_4 \rangle$  mit  $V_4 = \{S_4, T\}$  und  $P_4 = \{S_4 \rightarrow aS_4b, S_4 \rightarrow aTb, S_4 \rightarrow \varepsilon, aTb \rightarrow T, aTb \rightarrow S_4\}$ .
- Geben Sie zu jeder dieser Grammatiken  $G_k$  das maximale  $i$  an, so dass  $G_k$  eine Grammatik vom Typ  $i$  ist.
  - Beschreiben Sie  $L(G_k)$  in einer geeigneten Form, z.B. mittels einer Mengennotation.