TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Formale Systeme

Probeklausur – Besprechung am 01.02.2024

Wintersemester 2023/24

Aufgabe 1

(3+1+1+2=7 Punkte)

a) Geben Sie die formale Definition eines *nichtdeterministischen Kellerautomaten* an. Vervollständigen Sie hierfür den nachfolgenden Text:

Ein nichtdeterministischer Kellerautomat (PDA) ist ein Sechs-Tupel $\mathcal{M} = \langle \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \rangle$ mit den folgenden Bestandteilen: ...

b) Welcher andere Akzeptanzbegriff für Kellerautomaten ist laut Anmerkung in der Vorlesung auch möglich?

c) Benennen Sie formal die Unterschiede zwischen deterministischen und nicht-deterministischen Kellerautomaten.

d) Welcher Typ formaler Sprachen wird durch deterministische und welcher durch nichtdeterministische Kellerautomaten charakterisiert? Benennen Sie jeweils eine Sprache genau diesen Typs.

Aufgabe 2

(2+4=6 Punkte)

a) Formulieren Sie formal präzise das *Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.* Vervollständigen Sie hierfür den nachfolgenden Text:

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 0$, so dass gilt: ...

b) Zeigen Sie mithilfe des *Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen*, dass die Sprache $L = \{0^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 3

(2+2+1=5 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V = \{S, A, B\},\ \Sigma = \{a, b\} \text{ und}$$
$$P = \{S \to ASB,\ S \to AB,\ AB \to BA,\ A \to a,\ B \to b\}.$$

a) Von welchem maximalen Typ ist G? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie vier Wörter $w_1, w_2, w_3, w_4 \in L(G)$ mit $|w_1| = |w_2| = |w_3| = |w_4| = 4$ an.

c) Beschreiben Sie die durch G erzeugte Sprache $L(G)$ in einer geeigneten Notation.

Aufgabe 4

(1+3+2=6 Punkte)

Gegeben sei das Wort $w = abac$ und die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V = \{S, A, B, C, D\},\ \Sigma = \{a, b, c\} \text{ und}$$
$$P = \{S \to AB,\ A \to BA,\ A \to a, B \to AC,\ B \to BB,\ B \to b,$$
$$C \to c,\ D \to AB\}.$$

a) Ist die Grammatik G in *Chomsky*-Normalform? Begründen Sie Ihre Antwort.

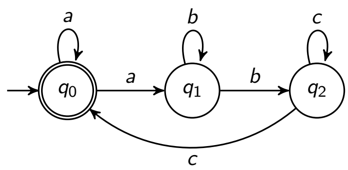
b) Entscheiden Sie mithilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob $w \in L(G)$ gilt. Transformieren Sie, falls notwendig, G in *Chomsky*-Normalform.

c) Entfernen Sie in G, sofern vorhanden, nichtterminierende und nichterreichbare Symbole. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 5

(4+4=8 Punkte)

Gegeben sei der NFA $\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \delta, \{q_0\}, \{q_0\})$ mit δ:



a) Berechnen Sie mithilfe des Arden-Lemmas einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L(\mathcal{M})$.

b) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{M}$ äquivalenten DFA $\mathcal{M}'$. Verwenden Sie dazu die Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Stellen Sie dabei sicher, dass der konstruierte Automat keine unerreichbaren Zustände erhält.

Aufgabe 6

(5+4=9 Punkte)

Geben Sie die Nerode-Äquivalenzklassen für die nachfolgenden Sprachen an.

- $L_1 = L((ab)^* a^* \mid b)$
- $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$

Geben Sie außerde den Minimalautomaten für L_1 an.

Aufgabe 7

(3+4=7 Punkte)

Seien Σ ein Alphabet, $w \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$. Eine *Injektion von a in w* ist ein Wort, das aus w entsteht, wenn ein a an eine beliebige Stelle in w eingefügt wird. Wir definieren die *Injektionen von a in w* als

$$w\|_a := \{uav \mid \exists u, v \in \Sigma^* : w = uv\}.$$

Der Operator $\|_a$ ($a \in \Sigma$) ist auf Wörtern definiert und wird auf natürliche Weise auf Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ erweitert durch:

$$L\|_a := \bigcup_{w \in L} w\|_a.$$

a) Seien $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{a^m b^n c^m \mid m > 0, n \geq 0\}$. Bestimmen Sie drei verschiedene Wörter $w_1, w_2, w_3 \in (L\|_b) \setminus L$.

b) Die regulären Sprachen sind unter $\|_a$ (für alle $a \in \Sigma$) abgeschlossen. Begründen Sie die Korrektheit dieser Aussage.

Aufgabe 8

(2+4+2=8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Formel

$$F := \neg b \vee \big((\neg a \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg d \vee (a \wedge \neg c))\big)$$

äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

b) Nutzen Sie das Resolutionsverfahren, um zu zeigen, dass

$$\{\,(\neg a \vee b), (\neg a \vee d), (\neg b \vee \neg d \vee c), (\neg d \vee \neg c \vee \neg a)\} \models \neg a$$

gilt.

c) Begründen Sie, warum die Hyperresolution für Horn-Formeln immer in polynomieller Zeit terminiert.